数理解析研究所講究録
1006巻 1997年 96-105

Homotopy invariant of smooth maps of rational homology 3-sphere into S^2

佐久間 一浩（高知高専）

§0. 序

Millett & Rolfsen [MR] は、球面の間の写像 $f: S^{2n-1} \to S^n$ に対して定義されるホップ不変量をホモロジー球面の間の写像の場合に拡張して、特に $n=2$ の場合でザイフェルトファイバー構造によって決められる射影に関して"ホップ不変量"の値を計算した．彼らの計算結果によれば、その値は特異ファイバーの order の積となる．つまり写像のホモトピー不変量である"ホップ不変量"はザイフェルトファイバー構造を持つ場合は、特異ファイバーの様子だけで完全に決まる．

そこで本稿では彼らの結果を踏まえて、自然に起こる次の問題を考察する．

"任意の写像に対して、ホップ不変量はどのような値を取り得るだろうか？　また、その値はホモロジー球面のいかなる構造から制限を受けるか？"

球面の場合は、n が偶数ならば、任意の整数値（但し、n が 2, 4, 8 に限る）を取り、n が奇数ならば常に値は 0.

しかし、一般にホモロジー球面を考えた場合には事情は少し異なる. これは定義を見れば容易に推察出来る. まずは, Millett & Rolfsen による定義を述べよう.

以下、$\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を連想されたい.

$g: M^{2n-1} \to N^n \ (n \geq 2)$ を Λ-ホモロジー球面の間の連続写像とする. C_gで、写像 g の写像錐を表す. カップ積を使うのでコホモロジー群を考える. 簡単な計算から,

$$H^n(C_g) \xrightarrow{\cong} H^n(N^n) \cong \Lambda, \quad H^{2n}(C_g) \cong \Lambda$$

がわかる. C_gのホモトピー型が写像 g のホモトピー不変量を決めるので、次の様に定める訳である.

$\alpha_n \in H^n(C_g)$, $\beta_{2n} \in H^{2n}(C_g)$ を生成元とし、写像 g のホップ不変量 $H(g)$ を次の等式を満たす値とする.

$$\alpha_n \cup \alpha_n = H(g)\,\beta_{2n} \qquad (H(g) \in \Lambda).$$

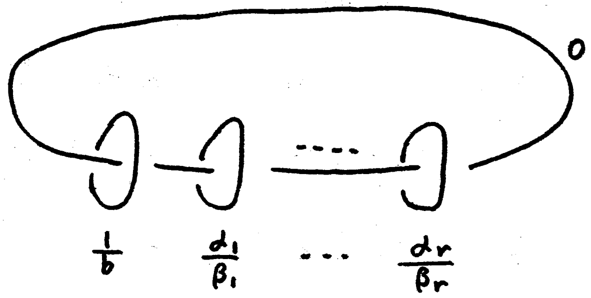
$H(g)$は, 写像 g のホモトピー類の選び方に依らないことがすぐわかる.

§1. Millett - Rolfsen の定理

ここでは前節で述べたMillett & Rolfsenの結果を少し詳しく紹介する. M^3をΛ-ホモロジー球面で底空間がS^2のザイフェルトファイバー構造を持つとする. ザイフェルト不変量を表示すれば、一般に次の様に書ける.

$$M^3 = \{ b ; (\alpha_1, \beta_1), \cdots\cdots, (\alpha_r, \beta_r) \}$$

で、bはオイラー数，(α_i, β_i)は特異ファイバーの型，rは特異ファイバーの数を表す．M^3をカービー計算で表せば，



である3次元閉多様体である．そして特に、

$$\Delta = -b\alpha_1 \cdots \alpha_r - \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r - \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \cdots \alpha_r - \cdots - \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \beta_r$$

とおけば、M^3がΛ－ホモロジー球面となる必要十分条件は次である：

$$\Delta = \pm 1 \text{ for } \Lambda = \mathbb{Z},\ \Delta \neq 0 \text{ for } \Lambda = \mathbb{Q},\ \gcd(p, \Delta) = 1 \text{ for } \Lambda = \mathbb{Z}_p$$

<u>定理1 (Millett & Rolfsen)</u>

M^3をS^2上のザイフェルトファイバー構造を持ちしかも特異ファイバーのorderが$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$である$\Lambda$－ホモロジー球面であるとする．このとき、射影$g: M^3 \to S^2$のホップ不変量は$M^3$, S^2の向きを適当に選べば，

$$H(g) = \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_r$$

が成り立つ．

さて、このホップ不変量の値の取り方であるが、後述するように、実はホモロジー3球面の基本群に深く関わる．例えば上の定理とRubinsteinの定理を合わせると次を得る．([R]参照)

定理2.
M^3を既約なホモロジー球面で基本群が有限で埋め込まれたクラインボトルを含むとする．このとき、ザイフェルトファイバー構造が $f: M^3 \to S^2$ が存在して，$H(f) = 4k$ $(k \geq 1)$ である．

§2. 微分形式によるホップ不変量の定義

我々の目標は、ホップ不変量の取り得る値は決定することであった。これには議論をスムーズにするためにsmooth cat.に考えると都合がよい．任意の連続写像（多様体の間の）は滑らかな写像にホモトピックであることに注意する．そこでホップ不変量を微分形式を用いて、定義し直す．
M^3をQ−ホモロジー3球面とする．$f: M^3 \to S^2$ をC^∞写像とする．$\alpha \in H^2(S^2; \mathbb{R})$を生成元とすれば、$H^2(M^3; \mathbb{R}) = 0$なので．$M^3$上の1-form ωで、$f^*\alpha = d\omega$の解が存在する．そこで，写像fのホップ不変量を、

$$H(f) = \int_{M^3} \omega \wedge d\omega$$

で定める．

容易に、ホップ不変量はωの選び方に依らず、互いにホモトピックなC^∞写像は同じ値を取ることがわかる。また、Millett & Rolfsen の定義とは多様体の向きの選び方を無視すれば一致することもわかる。勿論、微分形式による定義でも適当な次元のホモロジー球面の間の写像に対して定義が可能である。詳しくは、Bott-Tu [BT] の III §17 を参照されたい。この本は大変分かり易く書いてあるので大いに参考にした。

さて、こうして定義されたホップ不変量が、実際 nontrivial でしかも整数値を取らない典型例を与えておこう。それにはホップファイブレーションを使うと便利である。

$\varphi : S^3 \to S^2$, $\varphi(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ を Hopf fibration とする。但し、向きを適当に定めて、$H(\varphi) = 1$ としておく。
$L(p,1)$ を $(p,1)$ 型のレンズ空間 $(p \geq 2)$ とする。

<u>命題 3.</u>

$\pi : S^3 \to L(p,1)$ を自然な p 重被覆写像とする。このとき、

$$\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & \\
L(p,1) \arrow[r, "f"'] & S^2
\end{tikzcd}$$

となるC^∞写像fのホップ不変量は、$H(f) = \dfrac{1}{p}$ である。

∵) 初めに、$L(p,1)$ 上の任意の 3-form ξ に対して、

$$\int_{S^3} \pi^* \xi = p \int_{L(p,1)} \xi$$

が成り立つことを示しておく。$\int_{L(p,1)} \xi = k \in \mathbb{R}$ とおく。

$L(p,1)$ の基本3-型式を η とすれば

$\int_{L(p,1)} (\xi - k\eta) = 0$ なので、$\xi = k\eta + d\omega$ を満たす

$L(p,1)$ 上の 2-form ζ が存在する。このとき、

$\pi^* \xi = k \pi^* \eta + d\pi^* \zeta$ なので

$\int_{S^3} \pi^* \xi = k \int_{S^3} \pi^* \eta = k \deg(\pi) = p \int_{L(p,1)} \xi$ である。

但し、最初の等式は Stokes の定理、二番目は写像度の定義。

そこで、$H(f)$ の定義にある contact form $\omega \wedge d\omega = \xi$ として上の式を適用すると、

$$p \int_{L(p,1)} \xi = p \int_{L(p,1)} \omega \wedge d\omega = \int_{S^3} \pi^* (\omega \wedge d\omega) = \int_{S^3} \pi^* \omega \wedge d\pi^* \omega$$

が成り立つ。一方、ω の定義から

$$d\pi^* \omega = \pi^* (d\omega) = \pi^* (f^* \alpha) = (f \circ \pi)^* \alpha = \varphi^* \alpha$$

なので、

$\int_{S^3} \pi^* \omega \wedge \varphi^* \alpha$ は、写像 φ のホップ不変量だから、証明

が終わった。∎

さて、このホップ不変量は、写像のホモトピー不変量であったから、$H:[M^3,S^2]\longrightarrow\mathbb{R}$, $H([f])=H(f)$ ($[f]$は写像のホモトピー類)と定めれば、準同型写像である。例えば、命題3の結果から、$H([f])=pH(f)$ ($M^3=L(p,1)$のとき) と定めてやると、次の可換図から

$$\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S^3 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi : \text{Hopf fibration}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start, shift right=4ex] & \\
L(p,1) \arrow[r, "g"'] & L(p,1) \arrow[r, "f"'] & S^2
\end{tikzcd}$$

(gは写像度が $^{\forall}g\in\mathbb{Z}$ の写像を表す)

次の補題から、$H(g\circ f)=\dfrac{g}{p}$ であることが従う。

また、この構成と $\pi_3(S^2)\cong\mathbb{Z}$ より、$[L(p,1),S^2]\cong\mathbb{Z}$ であることは明らか。　(集合として等しい)

<u>補題4.</u>

任意のC^∞写像 $g:\bar{M}^3\to M^3$, $f:M^3\to S^2$に対して、

$$H(f\circ g)=\deg(g)\,H(f)$$

が成り立つ。

(証明は命題3の証明の中に殆んど含まれている)

更に、これらの結果はもう少し一般的な設定の下で成り立つことがわかる。詳しく述べると、

M^3をQホモロジー3球面とする．任意の向き付けられた3次元閉多様体からS^3への写像度1の写像があるから滑らかに近似して、上のことから

$$M^3 \xrightarrow{g} S^3 \xrightarrow{\varphi} S^2$$

gを写像度1のC^∞写像、φを Hopf fibration とすれば、この合成写像のホップ不変量は、$H(\varphi \circ g) = 1$である．更に、

$$\pi_1(M^3) \xrightarrow{\Phi} \{\text{位数}\ p\ \text{の群}\} \rightarrow 0$$

があるならば．Ker Φに対応したp重被覆を取り，加えて被覆写像$\pi : \tilde{M} \rightarrow M^3$で$\tilde{M}$が$\mathbb{Z}$ホモロジー3球面になる場合には、Millett-Rolfsen の定義からわかるように，$\tilde{M} \xrightarrow{h} S^2$のホップ不変量は常に整数だから、$H(h) = g$とおけば，前と同様に、

$$\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M^3 \xrightarrow{\psi} S^2$$

において、ホップ不変量 $H(\psi) = \dfrac{g}{p}$ である．

従って，例えば、$M^3 \cong L(p, k)$（任意のレンズ空間）の場合も$L(p, k) \xrightarrow{\psi} S^2$のホップ不変量は，$H(\psi) = \dfrac{g}{p}\ ({}^\forall g \in \mathbb{Z})$である．

§3．C^∞写像の左右同値不変量

C^∞写像の左右同値による分類は、次元が上がればそれだけ一般に難しい。

ここで定義したホップ不変量は、弱い意味ではあるがC^∞写像の左右同値の判定の目安を与える．まず，次の補題が容易に示せる

補題5.

任意のC^∞写像 $\varphi: S^2 \to S^2$ があって，$f: M^3 \to S^2$ のホップ不変量が定義されていれば，

$$H(\varphi \circ f) = (\deg(\varphi))^2 H(f)$$

が成り立つ．（証明略）

従って，次のことが得られる．

定理6.

M^3：$\mathbb{Q}$ホモロジー3球面

$f, g: M^3 \to S^2$　任意のC^∞写像　に対して

fとgが左右同値ならば、$H(f)$と$H(g)$の絶対値は等しい．

（証明は、補題4,5より明らか）

finite map germ $f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ に対するEisenbud-Levineの公式（[EL]参照）では，写像度の絶対値が$Q(f)$の代数的構造と密接に結びついていることが発見された訳で、特に

二つの map germ が左右同値ならば，Mather の結果から写像度の絶対値は等しいことが従う．このことから，我々の定理6 の結果は，map germ $f:(\mathbb{R}^4,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$（有限確定ぐらい？）の幾何的不変量として，ホップ不変量を考え，それを計算可能な環の構造と結び付けられる可能性を示唆しているのかもしれない．

参考文献

[BT] R. Bott & L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology Grad. Texts in Math. NO. 82, 1982

[EL] D. Eisenbud & H. Levine, An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ, Ann. of Math 106 (1977), 19-44.

[MR] K. Millett & P. Rolfsen, A theorem for Borsuk-Ulam type for Seifert-fibered 3-manifolds, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1986), 523-532.

[R] J. H. Rubinstein, On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles, Trans. AMS 251 (1979) 129-137.